Proposition: Ist $\dim_K(V) < \infty$, so existieren für alle $r \geqslant 0$ natürliche Isomorphismen

$$\Lambda^r(V^\vee) \xrightarrow[\sim]{\varphi_r} \mathrm{Alt}^r(V,K) \xrightarrow[\sim]{} (\Lambda^r V)^\vee.$$

Dabei ist der zweite Isomorphismus ein Spezialfall der Adjunktionsformel, und der erste ist charakterisiert durch die Formel

$$\cancel{\varphi_r(\ell_1,\ldots,\ell_r)(v_1,\ldots,v_r)} \;\; \varphi_r(\ell_1\wedge\ldots\wedge\ell_r)(v_1,\ldots,v_r) = \sum_{\sigma\in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \ell_1(v_{\sigma 1})\cdots \ell_r(v_{\sigma r}).$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{natürlich}\\ (V\otimes V)^\vee \cong V^\vee\otimes V^\vee \\ \hline (S^r V)^\vee \cong S^r(V^\vee)\\ \text{nicht natürlich}\end{array}}$$

Bem.:

Adjunktion: $\mathrm{Alt}^r(V,W) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^r V, W)$

$\mathrm{Alt}^r(V,K) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^r V, K) = (\Lambda^r V)^\vee.$

$$(V^\vee)^r \longrightarrow \mathrm{Alt}^r(V,K),$$

$$(\ell_1,\ldots,\ell_r) \mapsto \Big((v_1,\ldots,v_r) \mapsto \sum_{\sigma\in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot \ell_1(v_{\sigma 1})\cdots \ell_r(v_{\sigma r}).\Big)$$

multilinear in $v_1,\ldots,v_r$. ✓

alternierend: Sei $v_i = v_j$ für gewisse $i<j$.

Dann ändert sich $\ell_1(v_{\sigma 1})\cdots \ell_r(v_{\sigma r})$ nicht, wenn σ zu $\sigma\tau$ abgeändert wird, wo τ nur i,j vertauscht.

Wegen $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$, ist $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$.

$\Rightarrow$ alle Terme heben sich paarweise weg und Summe $=0$. ✓

die ist multilinear. ✓

und alternierend:

Sei $\ell_i = \ell_j$ für gewisse $i<j$.

so zeigt man analog, dass der Wert 0 ist. ✓

UE von $\Lambda^r(V^\vee) \Rightarrow \exists!$ lin. Abb. $\Lambda^r(V^\vee) \to \mathrm{Alt}^r(V,K)$ mit der obigen Formel.

Wähle Basis in V; zeige Bijektivität

qed.

Proposition: Für alle $r, s \geqslant 0$ kommutiert das folgende Diagramm

$(l_1 \wedge \dots \wedge l_r,\ l_{r+1} \wedge \dots \wedge l_{r+s}) \mapsto (l_1 \wedge \dots \wedge l_{r+s})$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^r(V^\vee) \times \Lambda^s(V^\vee) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\varphi_r \times \varphi_s", "\wr"'] & \Lambda^{r+s}(V^\vee) \arrow[d, "\varphi_{r+s}", "\wr"'] \\
\mathrm{Alt}^r(V,K) \times \mathrm{Alt}^s(V,K) \arrow[r, "\wedge"] & \mathrm{Alt}^{r+s}(V,K)
\end{tikzcd}$$

wobei die untere Abbildung $\wedge$ definiert ist durch die Formel

$$\boxed{(\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{r+s}) \ := \ \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma r}) \cdot \psi(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)})}$$

und sich die Summe über alle $\sigma \in S_{r+s}$ mit $\sigma 1 < \dots < \sigma r$ und $\sigma(r+1) < \dots < \sigma(r+s)$ erstreckt.

Bew.: Genügt für $\varphi = \varphi_r(l_1 \wedge \dots \wedge l_r)$ und $\psi = \varphi_s(l_{r+1} \wedge \dots \wedge l_{r+s})$ für $l_i \in V^\vee$.

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi_{r+s}(l_1 \wedge \dots \wedge l_{r+s})(v_1, \dots, v_{r+s})}_{(\sigma 1, \dots, \sigma r;\ \sigma(r+1), \dots, \sigma(r+s))} = \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot l_1(v_{\sigma 1}) \cdots l_{r+s}(v_{\sigma(r+s)})$$

Schreibe $\sigma = \tau\rho\pi$ mit $\tau, \rho, \pi \in S_{r+s}$ und: $\begin{cases} \tau 1 < \dots < \tau r;\ \tau(r+1) < \dots < \tau(r+s) \\ \rho i = i \text{ für alle } i > r \\ \pi i = i \text{ für alle } i \leq r. \end{cases}$

$$= \sum_{\tau, \rho, \pi} \mathrm{sgn}(\tau\rho\pi) \cdot l_1(v_{\tau\rho\pi 1}) \cdots l_{r+s}(v_{\tau\rho\pi(r+s)})$$

$$= \sum_\tau \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_\rho \mathrm{sgn}(\rho) \cdot l_1(v_{\tau\rho\cancel{\pi}1}) \cdots l_r(v_{\tau\rho\cancel{\pi}r})}_{\varphi_r(l_1 \wedge \dots \wedge l_r)(v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau r})} \Bigg) \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_\pi \mathrm{sgn}(\pi) \cdot l_{r+1}(v_{\tau\cancel{\rho}\pi(r+1)}) \cdots l_{r+s}(v_{\tau\cancel{\rho}\pi(r+s)})}_{\varphi_s(l_{r+1} \wedge \dots \wedge l_{r+s})(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+s)})} \Bigg)$$

Lged.

Bemerkung: In der Vorlesung Analysis II werden Differentialformen oft als alternierende Multilinearformen eingeführt und ihr äusseres Produkt durch die obige alternierende Summe. Diese etwas künstlich wirkende Formel wird nach Übertragung auf die äussere Potenz $\Lambda^r(V^\vee)$ viel einfacher und natürlicher.

12.8 Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Für jeden K-Vektorraum V der Dimension $n < \infty$ induziert das äussere Produkt einen natürlichen Isomorphismus

$\dim(\Lambda^{n-1}V) = \binom{n}{n-1} = n$.

$$\Lambda^{n-1}V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V, \Lambda^n V), \ \xi \mapsto (v \mapsto \xi \wedge v).$$

Beweis: $\Lambda^{n-1}V \times V \xrightarrow{\wedge} \Lambda^n V$ bilinear

$\Rightarrow$ natürliche lin. Abb. $\varphi: \Lambda^{n-1}V \to \mathrm{Hom}(V, \Lambda^n V)$.

Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V

$\Rightarrow$ $b_1 \wedge \ldots \wedge b_{i-1} \wedge b_{i+1} \wedge \ldots \wedge b_n$ für $i = 1 \ldots n$ bilden Basis von $\Lambda^{n-1} V$.

Die Wahl eines Isomorphismus $\Lambda^n V \cong K$ liefert dann einen Isomorphismus

$\dim(\Lambda^n V) = \binom{n}{n} = 1$

$$\Lambda^{n-1}V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V, K) = V^\vee.$$

$$\underbrace{\varphi(b_1 \wedge \ldots \wedge b_{i-1} \wedge b_{i+1} \wedge \ldots \wedge b_n)(b_j)}_{\shortparallel \atop (-1)^{n-i} \cdot l_i(b_j) \cdot b_1 \wedge \ldots \wedge b_n} = b_1 \wedge \ldots \wedge b_{i-1} \wedge b_{i+1} \wedge \ldots \wedge b_n \wedge b_j$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ (-1)^{n-i} \cdot b_1 \wedge \ldots \wedge b_n & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

$l_1, \ldots, l_n$ duale Basis.

$\Rightarrow$ Iso. qed.

Ist weiter V ein euklidischer Vektorraum, so induziert das Skalarprodukt wie in §10.12 einen Isomorphismus $V^\vee \cong V$, insgesamt also einen Isomorphismus

$$\Lambda^{n-1}V \xrightarrow{\sim} V.$$

$\det : \Lambda^3 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

Im Spezialfall $n = 3$ liefert dies eine alternierende bilineare Abbildung

$$V \times V \to \Lambda^2 V \xrightarrow{\sim} V, \quad (v, w) \mapsto v \wedge w \mapsto v \times w.$$

Erklärung:
$\Lambda^2 V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, \Lambda^3 V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, K) = V^\vee \xleftarrow{\sim} V.$

$u \wedge v \mapsto (w \mapsto u \wedge v \wedge w) \mapsto (w \mapsto \det(u,v,w)) = (w \mapsto \langle v', w \rangle) \longleftarrow\!\!\shortmid\, v' \overset{!}{=} u \times v$

Für $\boxed{V = \mathbb{R}^3}$ mit dem Isomorphismus $\det \colon \Lambda^3(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ und dem Standard-Skalarprodukt erhält man so das *Vektorprodukt*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \boxed{\begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}}.$$

$\det(u,v,w) = \langle u \times v, w \rangle$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

$\det(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3$

$\langle u \times v, w \rangle = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3$

$u \times v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

Das Vektorprodukt hat viele Anwendungen in der dreidimensionalen Geometrie, Mechanik, Elektrodynamik, usw. Der natürliche allgemeine Begriff dahinter ist jedoch immer das äussere Produkt, welches eben in beliebiger Dimension existiert.

Grundeigenschaften: Nach Konstruktion ist das Vektorprodukt bilinear und alternierend. Weiter gilt für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

(a) $\langle u, v \times w\rangle = \langle u \times v, w\rangle = \det(u, v, w)$.

(b) $u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle \cdot v - \langle u, v\rangle \cdot w$ *(Grassmann-Identität)*.

(c) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$ *(Jacobi-Identität)*.

(d) $v \times w = 0$ genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Geometrisch ist das Vektorprodukt charakterisiert durch die Eigenschaften:

(e) $v \times w$ ist orthogonal zu v und w. $\langle v\times w, v\rangle = \det(v, w, v) = 0$

(f) Sind v und w linear unabhängig, so ist $(v, w, v \times w)$ ein *Rechtssystem*, mit anderen Worten, es gilt $\det(v, w, v \times w) > 0$.

$\det(v, w, v\times w) = \langle v\times w, v\times w\rangle > 0$.

(g) $|v \times w|$ ist der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms, also $|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot |\sin \vartheta|$ wenn $\langle v, w\rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos \vartheta$ ist.

Bonusmaterial 1: Differentialformen und Integralsätze

1. Differentialformen: Betrachte eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$x_1, \to x_n$ Variable

$dx_1, \to dx_n$

Definition: Ein Ausdruck

$$(*) \qquad \boxed{\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} f_{i_1,\ldots,i_r} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}}$$

mit Funktionen $f_{i_1,\ldots,i_r} : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst eine *Differentialform vom Grad r auf Ω*.

Bemerkung: Für den Vektorraum $V := \mathbb{R}^n$ identifizieren wir das Symbol dx_i mit der Linearform

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i.$$

Dann ist $dx_1, \ldots, dx_n$ die zu der Standardbasis von V duale Basis des Dualraums $V^\vee$, und eine Differentialform vom Grad r ist eine Funktion $\Omega \to \bigwedge^r(V^\vee)$.

Spezialfall: Eine Differentialforma vom Grad $r = 0$ ist einfach eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Bemerkung: Jede Differentialform vom Grad $> n$ ist Null.

2. Ableitung: Der Einfachheit halber betrachten wir nur beliebig oft differenzierbare, das heisst C^∞-Abbildungen, anstatt C^k-Abbildungen für beliebiges k. Sei zunächst Ω offen in $\mathbb{R}^n$. $\ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Definition: Die Ableitung einer C^∞-Funktion f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$df \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

ist eine C^∞-Differentialform vom Grad 1.

Definition: Für jede C^∞-Differentialform ω wie in $(*)$ sei

$$\boxed{d\omega \;:=\; \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} df_{i_1,\ldots,i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.}$$

Dies ist eine C^∞-Differentialform vom Grad $r+1$.

Proposition: Für jede C^∞-Differentialform ω wie in $(*)$ gilt

$$\boxed{dd\omega \;= 0.}$$

Bsp.: $$ddf = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \right) = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot dx_j \right) \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \underbrace{dx_j \wedge dx_i}_{=0 \text{ für } i=j} = 0$$

weil $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$